



**SIMULAZIONE**

**ESAME DI MATURITA' DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE**

Indirizzo: LI03-SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

LI15-SCIENTIFICO - SEZIONE AD INDIRIZZO SPORTIVO

**Tema di: MATEMATICA**

*Il candidato risolva uno dei problemi e risponda a 4 quesiti.*

**PROBLEMA 1**

Sia  $f_a(x) = \frac{x^2 - ax}{|x| + 1}$ , con  $a \in \mathbb{R}$ .

- Dimostrare che, per qualsiasi valore di  $a \in \mathbb{R}$ , la funzione  $f_a(x)$  è definita, continua e derivabile per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . Dimostrare poi che  $f_a(x)$  ammette derivata seconda in  $x = 0$  solo se  $a = 0$ .
- Determinare, in funzione di  $a$ , le coordinate del punto  $A$  di intersezione tra gli asintoti del grafico di  $f_a(x)$ .

Si ponga ora  $a = 2$ .

- Completare lo studio di funzione di  $f_2(x)$  e tracciarne il grafico. Stabilire in particolare se il grafico di  $f_2(x)$  presenta o meno un punto di flesso e argomentare la risposta. Determinare poi le equazioni delle rette  $t_1$  e  $t_2$  tangenti al grafico di  $f_2(x)$  nei punti in cui questo interseca l'asse  $x$ .
- Considerare il triangolo  $T$  formato dalle rette  $t_1$  e  $t_2$  determinate al punto precedente e dall'asse  $x$ . Internamente a  $T$  considerare la regione di piano  $S$  delimitata dall'asse  $x$  e dal grafico di  $f_2(x)$ . Determinare il rapporto tra l'area di  $S$  e l'area di  $T$ .

**PROBLEMA 2**

Nella famiglia di funzioni  $y = x \cdot e^{kx}$  ( $k \in \mathbb{R}^+$ ), determinare quella che individua con l'asse delle ascisse nell'intervallo  $[0, 2]$  un'area pari a  $\frac{1}{k^2}$ .

- verificato che si tratta della funzione  $y = \varphi(x) = x \cdot e^{\frac{1}{2}x}$ , effettuarne lo studio completo e tracciarne il grafico qualitativo;



- b. calcolare l'area compresa tra il grafico della funzione  $\varphi(x)$  e l'asse delle  $x$  nell'intervallo  $[-4; 2]$ ;
- c. determinare, al variare del parametro reale  $h$ , il numero di soluzioni dell'equazione  $\varphi(x) = h$  ;
- d. stabilire per quali valori dei parametri  $a, b$  e  $c$ , con  $a, b, c$  appartenenti a  $R$ ,

$$\text{la funzione } g(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{se } x < 0 \\ x e^{\frac{1}{2}x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

risulti continua e derivabile in  $R$  e passante per il punto  $P\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$  ;

- e. determinare le coordinate dei punti della funzione  $g(x)$  , in cui la retta tangente risulta parallela alla retta  $r$  di equazione  $x + 2y - 4 = 0$  .

### QUESITI

1. In un dado a sei facce truccato il numero 6 esce con probabilità  $p$ . Il dado viene lanciato per sei volte. Determinare la probabilità dei seguenti eventi:  
 $A$ : «il numero 6 esce esattamente due volte»;  
 $B$ : «il numero 6 esce esattamente tre volte».  
Per quali valori di  $p$  l'evento  $A$  è più probabile dell'evento  $B$ ?
2. Determinare le coordinate del punto  $H$ , proiezione ortogonale del punto  $P(-4, 0, -4)$  sul piano  $\pi$  di equazione  $x + y + 16 = 0$  ; determinare poi l'equazione della superficie sferica  $S$  di centro  $P$  e tangente il piano  $\pi$  in  $H$ .
3. Il trapezio isoscele  $ABCD$  è circoscritto a una circonferenza di raggio  $r$ . La base maggiore  $AB$  è lunga il triplo della base minore  $CD$ . Determinare l'ampiezza degli angoli del trapezio e il rapporto tra il raggio della circonferenza inscritta e la base minore.



4.  $p(x)$  è una funzione polinomiale pari di grado 4. Il suo grafico, in un sistema di riferimento cartesiano, ha un punto stazionario in  $A(-\sqrt{2}; -2)$  e passa per l'origine  $O$ . Determinare le intersezioni tra il grafico di  $p(x)$  e quello di  $q(x) = \frac{p(x)}{x^3}$ .
5. Date le funzioni  $f(x) = \int_0^x t \sin t \, dt$  e  $g(x) = \int_0^x t (e^{2t} - 1) \, dt$  verificare che i grafici di entrambe passano per l'origine; calcolare poi  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ .
6. Data la curva  $\gamma$  di equazione  $y = \sqrt{2x}$  e il punto  $A(4, 0)$ , determinare il punto  $P$  della curva  $\gamma$ , la cui distanza da  $A$  sia minima. Determinare inoltre tale distanza e verificare che  $P$  è il piede della perpendicolare condotta da  $A$  alla tangente alla curva in  $P$ .
7. Determinare quale/i tra le seguenti funzioni soddisfano le ipotesi del teorema di Rolle su  $[1;4]$

$$f_1(x) = x^2 - 5x;$$

$$f_2(x) = (e^{x-4} - 1) \ln|x - 1|;$$

$$f_3(x) = \sqrt{(x-1)(x-4)} - x(x-4)(x-1)$$

motivando la risposta; dopo averle individuate, si determinino in esse i punti, di cui il teorema garantisce l'esistenza.

8. Verificare che l'equazione  $x^3 + x - 1 = 0$  ammette nell'intervallo  $[0; 1]$  un'unica soluzione reale. Considerata quindi la funzione  $y = x^3 + x - 1$  dimostrare che essa è invertibile in tale intervallo e detta  $x = g(y)$  la sua funzione inversa determinare  $g'(-1)$ .

-----  
Durata massima della prova: 6 ore.

E' consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (nota n. 78833 del 16/03/26 dal MIM).

E' consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano - lingua di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana. Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla consegna della traccia.