SIMULAZIONE
ESAME DI MATURITA' DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE
Indirizzo: LI03-SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE
LI15-SCIENTIFICO - SEZIONE AD INDIRIZZO SPORTIVO
Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei problemi e risponda a 4 quesiti.

PROBLEMA 1

Sia $f_a(x) = \frac{x^2-ax}{|x|+1}$, con $a \in \mathbb{R}$.

a. Dimostrare che, per qualsiasi valore di $a \in \mathbb{R}$, la funzione $f_a(x)$ è definita, continua e derivabile per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dimostrare poi che $f_a(x)$ ammette derivata seconda in $x = 0$ solo se $a = 0$.

b. Determinare, in funzione di a, le coordinate del punto A di intersezione tra gli asintoti del grafico di $f_a(x)$.

Si ponga ora $a = 2$.

c. Completare lo studio di funzione di $f_2(x)$ e tracciarne il grafico. Stabilire in particolare se il grafico di $f_2(x)$ presenta o meno un punto di flesso e argomentare la risposta. Determinare poi le equazioni delle rette t_1 e t_2 tangenti al grafico di $f_2(x)$ nei punti in cui questo interseca l'asse x.

d. Considerare il triangolo T formato dalle rette t_1 e t_2 determinate al punto precedente e dall'asse x. Internamente a T considerare la regione di piano S delimitata dall'asse x e dal grafico di $f_2(x)$. Determinare il rapporto tra l'area di S e l'area di T.

PROBLEMA 2

Nella famiglia di funzioni $y = x \cdot e^{kx}$ $(k \in R^+)$, determinare quella che individua con l'asse delle ascisse nell'intervallo $[0, 2]$ un'area pari a $\frac{1}{k^2}$.

a. verificato che si tratta della funzione $y = \varphi(x) = x \cdot e^{\frac{1}{2}x}$, effettuarne lo studio completo e tracciarne il grafico qualitativo;

b. calcolare l'area compresa tra il grafico della funzione $\varphi(x)$ e l'asse delle x nell'intervallo $[-4; 2]$;

c. determinare, al variare del parametro reale h, il numero di soluzioni dell'equazione $\varphi(x) = h$;

d. stabilire per quali valori dei parametri a, b e c, con a, b, c appartenenti a R,

la funzione $g(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & se \;\; x < 0 \\ x\, e^{\frac{1}{2}x} & se \;\; x \geq 0 \end{cases}$

risulti continua e derivabile in R e passante per il punto $P\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$;

e. determinare le coordinate dei punti della funzione $g(x)$, in cui la retta tangente risulta parallela alla retta r di equazione $x + 2y - 4 = 0$.

QUESITI

1. In un dado a sei facce truccato il numero 6 esce con probabilità *p*. Il dado viene lanciato per sei volte. Determinare la probabilità dei seguenti eventi:

A: «il numero 6 esce esattamente due volte»;

B: «il numero 6 esce esattamente tre volte».

Per quali valori di *p* l'evento *A* è più probabile dell'evento *B*?

2. Determinare le coordinate del punto H, proiezione ortogonale del punto $P(-4, 0, -4)$ sul piano π di equazione $x + y + 16 = 0$; determinare poi l'equazione della superficie sferica S di centro P e tangente il piano π in H.

3. Il trapezio isoscele *ABCD* è circoscritto a una circonferenza di raggio *r*. La base maggiore *AB* è lunga il triplo della base minore *CD*. Determinare l'ampiezza degli angoli del trapezio e il rapporto tra il raggio della circonferenza inscritta e la base minore.

4. $p(x)$ è una funzione polinomiale pari di grado 4. Il suo grafico, in un sistema di riferimento cartesiano, ha un punto stazionario in $A\left(-\sqrt{2};\ -2\right)$ e passa per l'origine O. Determinare le intersezioni tra il grafico di $p(x)$ e quello di $q(x) = \frac{p(x)}{x^3}$.

5. Date le funzioni $f(x) = \int_0^x t \sin t\ dt$ e $g(x) = \int_0^x t\,(e^{2t} - 1)\,dt$ verificare che i grafici di entrambe passano per l'origine; calcolare poi $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

6. Data la curva γ di equazione $y = \sqrt{2x}$ e il punto $A(4, 0)$, determinare il punto P della curva γ, la cui distanza da A sia minima. Determinare inoltre tale distanza e verificare che P è il piede della perpendicolare condotta da A alla tangente alla curva in P.

7. Determinare quale/i tra le seguenti funzioni soddisfano le ipotesi del teorema di Rolle su [1;4]

$f_1(x) = x^2 - 5x;$

$f_2(x) = (e^{x-4} - 1)\ln|x - 1|\,;$

$f_3(x) = \sqrt{(x-1)(x-4)} - x(x-4)(x-1)$

motivando la risposta; dopo averle individuate, si determinino in esse i punti, di cui il teorema garantisce l'esistenza.

8. Verificare che l'equazione $x^3 + x - 1 = 0$ ammette nell'intervallo $[0; 1]$ un'unica soluzione reale. Considerata quindi la funzione $y = x^3 + x - 1$ dimostrare che essa è invertibile in tale intervallo e detta $x = g(y)$ la sua funzione inversa determinare $g'(-1)$.

Durata massima della prova: 6 ore.
E' consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (nota n. 78833 del 16/03/26 dal MIM).
E' consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano – lingua di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla consegna della traccia.