



SIMULAZIONE

ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzo: LI03-SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

LI15-SCIENTIFICO - SEZIONE AD INDIRIZZO SPORTIVO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei problemi e risponda a 4 quesiti.

PROBLEMA 1

Data la seguente funzione $f(x) = xe^x - 1$

- verificare che l'equazione $f(x) = 0$ ammette una sola soluzione positiva $x = k$;
- tracciarne un grafico qualitativo;
- considerato un punto $x_0 > 0$, verificare che il segmento di estremi $M(x_0; e^{x_0})$, $N(x_0; \ln x_0)$ ha lunghezza minima per $x_0 = k$;
- dimostrare che le funzioni $y = e^x$ e $y = \ln x$ hanno, nel punto di ascissa $x = k$, tangenti parallele;
- verificare che l'area della regione di piano finita individuata nel quarto quadrante dagli assi cartesiani e dal grafico di $f(x)$ si può esprimere nella forma $A = \left(k + \frac{1}{k}\right) - 2$.

PROBLEMA 2

Data la seguente funzione $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx + 1$

- determinare i valori dei parametri reali a e b in modo che essa presenti un punto di flesso in $x = \frac{3}{2}$ e che la retta r , tangente in $x = 0$ al grafico di $f(x)$, intersechi ulteriormente il grafico della funzione in un punto di ordinata $y = 10$;
- posti $a = -\frac{3}{2}$ e $b = 2$, tracciare un grafico qualitativo di $f(x)$ e verificare che massimo, minimo e flesso sono allineati sulla stessa retta;
- determinare, al variare del parametro reale k , il numero di intersezioni tra il grafico della funzione $f(x)$ e la retta $y = kx + 1$;
- determinare l'area della regione di piano finita di piano compresa tra il grafico di $f(x)$ e la sua retta tangente in $x = 0$.

QUESITI

- Si consideri il quadrato $ABCD$. Sul lato AB si disegni, internamente al quadrato, il triangolo equilatero ABE e sul lato BC si disegni, esternamente al quadrato, il triangolo equilatero BCF . Si dimostri che il triangolo BEF è isoscele e rettangolo e che i punti D , E e F sono allineati.



2. Trovare il polinomio di terzo grado avente un punto stazionario in $x = -1$, un punto di flesso in $x = -\frac{2}{3}$ e il cui grafico è tangente nel punto $A(0; 1)$ alla retta di equazione $y = 1 + x$.
3. La funzione $f(x) = \begin{cases} e^{-x} + 2ax + 1, & \text{per } x < 0 \\ a \sin(ax) + 2, & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$, con $a \in \mathbb{R}$, soddisfa il teorema di Lagrange nell'intervallo $\left[-1; \frac{\pi}{2}\right]$ per qualche valore del parametro reale a ?
In caso affermativo, in quali punti è verificato l'enunciato del teorema?
4. Determinare l'equazione cartesiana del piano passante per $P(1; 2; -1)$ e perpendicolare al vettore $\vec{n}$, avente componenti $(2; -1; 4)$. Stabilire poi se tale piano è perpendicolare alla retta r , di equazioni $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 + t \\ z = 2t \end{cases}$.
5. Un'urna contiene 100 palline rosse e un certo numero di palline bianche. Si estraggono successivamente e senza reimmissione due palline. Qual è il numero di palline bianche che rende massima la probabilità di estrarre 2 palline con colori diversi?
6. Considerata la parabola p di equazione $y = x^2$, determinare le coordinate del punto P , appartenente alla parabola p , avente distanza minima dalla retta r , di equazione $x - 2y - 4 = 0$; determinare poi il valore di tale distanza minima e rappresentare nel piano cartesiano la situazione ottimale.
7. Determinare i valori reali di α e di β affinché si abbia

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3 + 3\alpha x - 3e^x + \beta x^2}{x^2} = \frac{1}{2}$$

8. Nel libro "*La matematica: un linguaggio universale*" di Mario Livio, si afferma: «La simmetria è una delle idee più belle e profonde della matematica».
A proposito di simmetrie, si dimostrino due tra le seguenti proposizioni:
- Sia f una funzione pari e derivabile sul suo dominio; allora f' è una funzione dispari.
 - Se f è una funzione continua e dispari sul suo dominio, allora $f(0) = 0$.
 - Se f è una funzione integrabile sul suo dominio e pari, allora $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ per ogni a nel dominio di f .

Durata massima della prova: 6 ore.

E' consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (nota n. 10961 del 17/03/25 dal MIM).

E' consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano – lingua di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana. Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla consegna della traccia.