SIMULAZIONE
ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE
Indirizzo: LI03-SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE
LI15-SCIENTIFICO - SEZIONE AD INDIRIZZO SPORTIVO
Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei problemi e risponda a 4 quesiti.

PROBLEMA 1

Data la seguente funzione $f(x) = xe^x - 1$

a. verificare che l'equazione $f(x) = 0$ ammette una sola soluzione positiva $x = k$;

b. tracciarne un grafico qualitativo;

c. considerato un punto $x_0 > 0$, verificare che il segmento di estremi $M(x_0; e^{x_0})$, $N(x_0; lnx_0)$ ha lunghezza minima per $x_0 = k$;

d. dimostrare che le funzioni $y = e^x$ e $y = lnx$ hanno, nel punto di ascissa $x = k$, tangenti parallele;

e. verificare che l'area della regione di piano finita individuata nel quarto quadrante dagli assi cartesiani e dal grafico di $f(x)$ si può esprimere nella forma $A = \left(k + \frac{1}{k}\right) - 2$.

PROBLEMA 2

Data la seguente funzione $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx + 1$

a. determinare i valori dei parametri reali a e b in modo che essa presenti un punto di flesso in $x = \frac{3}{2}$ e che la retta r , tangente in $x = 0$ al grafico di $f(x)$, intersechi ulteriormente il grafico della funzione in un punto di ordinata $y = 10$;

b. posti $a = -\frac{3}{2}$ e $b = 2$, tracciare un grafico qualitativo di $f(x)$ e verificare che massimo, minimo e flesso sono allineati sulla stessa retta;

c. determinare, al variare del parametro reale k, il numero di intersezioni tra il grafico della funzione $f(x)$ e la retta $y = kx + 1$;

d. determinare l'area della regione di piano finita di piano compresa tra il grafico di $f(x)$ e la sua retta tangente in $x = 0$.

QUESITI

1. Si consideri il quadrato $ABCD$. Sul lato AB si disegni, internamente al quadrato, il triangolo equilatero ABE e sul lato BC si disegni, esternamente al quadrato, il triangolo equilatero BCF. Si dimostri che il triangolo BEF è isoscele e rettangolo e che i punti D, E e F sono allineati.

2. Trovare il polinomio di terzo grado avente un punto stazionario in $x=-1$, un punto di flesso in $x=-\frac{2}{3}$ e il cui grafico è tangente nel punto $A(0;1)$ alla retta di equazione $y=1+x$.

3. La funzione $f(x)=\begin{cases} e^{-x}+2ax+1, & per\ x<0 \\ a\sin(ax)+2, & per\ x\geq 0 \end{cases}$, con $a\in R$, soddisfa il teorema di Lagrange nell'intervallo $\left[-1;\frac{\pi}{2}\right]$ per qualche valore del parametro reale a?
In caso affermativo, in quali punti è verificato l'enunciato del teorema?

4. Determinare l'equazione cartesiana del piano passante per $P\,(1;2;-1)$ e perpendicolare al vettore $\vec{n}$, avente componenti $(2;\ -1;\ 4)$. Stabilire poi se tale piano è perpendicolare alla retta r, di equazioni $\begin{cases} x=1-2t \\ y=3+\ t \\ z=\ \ 2t \end{cases}$.

5. Un'urna contiene 100 palline rosse e un certo numero di palline bianche. Si estraggono successivamente e senza reimmissione due palline. Qual è il numero di palline bianche che rende massima la probabilità di estrarre 2 palline con colori diversi?

6. Considerata la parabola p di equazione $y=x^2$, determinare le coordinate del punto P, appartenente alla parabola p, avente distanza minima dalla retta r, di equazione $x-2y-4=0$; determinare poi il valore di tale distanza minima e rappresentare nel piano cartesiano la situazione ottimale.

7. Determinare i valori reali di α e di β affinché si abbia

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{3+3\alpha x-3e^x+\beta x^2}{x^2}=\frac{1}{2}$$

8. Nel libro *"La matematica: un linguaggio universale"* di Mario Livio, si afferma: «La simmetria è una delle idee più belle e profonde della matematica».
A proposito di simmetrie, si dimostrino due tra le seguenti proposizioni:

a. Sia f una funzione pari e derivabile sul suo dominio; allora f' è una funzione dispari.

b. Se f è una funzione continua e dispari sul suo dominio, allora $f(0)=0$.

c. Se f è una funzione integrabile sul suo dominio e pari, allora $\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=2\int_{0}^{a}f(x)\,dx$ per ogni a nel dominio di f.

Durata massima della prova: 6 ore.
E' consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (nota n. 10961 del 17/03/25 dal MIM).
E' consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano – lingua di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla consegna della traccia.